



Stabilisation de syst'emes non linéaires discrets

Mohamed Bensoubaya, Abdelhak Ferfera, Abderrahman Iggidr

► To cite this version:

Mohamed Bensoubaya, Abdelhak Ferfera, Abderrahman Iggidr. Stabilisation de syst'emes non linéaires discrets. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1995, 321 (3), pp.371–374. hal-01860805

HAL Id: hal-01860805

<https://hal.science/hal-01860805>

Submitted on 10 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stabilisation de systèmes non linéaires discrets

Mohamed BENSOUBAYA¹, Abdelhak FERFERA¹ et Abderrahman IGGIDR¹

Résumé – Nous nous intéressons à des systèmes non linéaires en temps discret, $x(k+1)=f(x(k), u(k))$, $f(0,0) = 0$, pour lesquels nous établissons une condition nécessaire d'existence d'un feedback stabilisateur continu. Nous donnons aussi une condition suffisante de stabilisation globale pour des systèmes affines en contrôle.

Stabilization of discrete-time nonlinear systems

Abstract – We consider discrete-time nonlinear systems, $x(k+1) = f(x(k), u(k))$, $f(0,0) = 0$, for which we give a necessary condition for the existence of a continuous stabilizing feedback. We also give a sufficient condition for the global stabilization of discrete-time nonlinear systems affine in controls.

1. INTRODUCTION. – Un problème important de l'Automatique est celui de la stabilisation d'un système par un retour d'état.

Le cas des systèmes non linéaires en temps continu a fait l'objet de nombreux travaux. Ainsi Brockett [1] a démontré qu'une condition nécessaire d'existence d'une loi de commande stabilisatrice et régulière en l'origine pour un système de classe \mathcal{C}^1 : $\dot{x} = f(x, u)$, $f(0,0) = 0$, est que l'application f soit surjective sur un voisinage de l'origine.

Pour les systèmes non linéaires en temps discret, dont l'intérêt est croissant (*cf.* la bibliographie de [5]), il n'existe que fort peu de résultats de stabilisation. En [2] des conditions suffisantes sont données pour des systèmes :

$$x(k+1) = f(x(k)) + g(x(k))u(k)$$

Celles-ci nécessitent la connaissance d'une fonction de Liapounov V de classe \mathcal{C}^2 , vérifiant l'analogie, en temps discret, des conditions de Jurdjevic-Quinn [6] et telle que

$$V(f(x) + g(x)u)$$

soit un polynôme en u de degré 2. V doit, en plus, satisfaire une condition de convexité si on veut une stabilisation globale.

¹INRIA Lorraine (Projet CONGE) & Université de Metz. 4, rue Marconi, 57 070 METZ – FRANCE.
Tél.: 87 20 35 14 - Télécopie : 87 76 39 77.

Le but de cette note est de donner, en temps discret, une condition nécessaire analogue à celle de [1] ainsi qu'une condition suffisante de stabilisation globale généralisant celles de [2]. On démontre que tout système de classe \mathcal{C}^0 affine en contrôle de type Jurdjevic-Quinn est globalement stabilisable par une commande bornée.

2. CONDITION NÉCESSAIRE DE STABILISATION. – Soit le système :

$$(1) \quad x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad f(0,0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

où $x(k) \in \mathbf{R}^n$, $u(k) \in \mathbf{R}^m$ et f est une fonction continue sur un voisinage $A \times U$ de $(0,0)$.

Le système (1) est \mathcal{C}^0 -stabilisable s'il existe une loi de commande $x \mapsto u(x)$, $u(0) = 0$, continue au voisinage de l'origine telle que pour le système bouclé :

$$x(k+1) = f(x(k), u(x(k)))$$

l'origine soit un point d'équilibre asymptotiquement stable (cf. [7]).

THÉORÈME 1. – *Une condition nécessaire pour que le système (1) soit \mathcal{C}^0 -stabilisable est que l'application $\gamma : A \times U \rightarrow \mathbf{R}^n$ définie par $\gamma(x, u) = f(x, u) - x$ soit surjective sur un voisinage de l'origine.*

Posons $a(x) = f(x, u(x))$. Si l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour $x(k+1) = a(x(k))$, il existe sur A une fonction de Lyapounv de classe \mathcal{C}^1 : $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$, $V(0) = 0$, telle que, pour x au voisinage de l'origine, $x \neq 0$, $V(a(x)) - V(x) < 0$ (cf. [3], [4]). Pour $\alpha > 0$ suffisamment petit, l'ensemble :

$$V^\alpha = \{x \in A \mid V(x) \leq \alpha\}$$

étant compact, on a $\sup\{V(a(x)) \mid x \in V^\alpha\} = \beta < \alpha$ et il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in V^\alpha$ et $\xi \in B_\eta = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq \eta\}$:

$$|V(a(x) - \xi) - V(a(x))| \leq K|\xi|, \quad K = \sup_{y \in V^\alpha + B_\eta} |\nabla V(y)|$$

Il s'ensuit que pour $|\xi| \leq \delta = \min\{\eta, \frac{\alpha - \beta}{K}\}$ on a $V(a(x) - \xi) \leq \alpha$. Ainsi $x \mapsto a(x) - \xi$ est une application continue de V^α dans lui-même. Par ailleurs, en considérant l'homotopie $\phi : V^\alpha \times [0, 1] \rightarrow V^\alpha$ donnée par $\phi(x, t) = \psi\left(x, \frac{t}{t-1}\right)$, $t \neq 1$, $\phi(x, 1) = 0$, où ψ est défini

par $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla V(\psi)$, $\psi(x, 0) = x$, on constate que V^α est contractile et donc que V^α a une homologie triviale. On peut alors conclure par application du théorème du point fixe de Lefschetz. ■

Exemple. – Comme en temps continu, un système non linéaire en temps discret peut être complètement contrôlable sans être \mathcal{C}^0 -stabilisable. C'est ce qu'illustre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + u_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + u_2(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + x_2(k)u_1(k) - x_1(k)u_2(k) \end{cases}$$

L'image de l'application $\gamma : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ définie par : $\gamma(x, u) = (u_1, u_2, x_2u_1 - x_1u_2)^\top$ ne contient aucun point de la forme $(0, 0, \varepsilon)^\top$, $\varepsilon \neq 0$. Ainsi, le système n'est pas \mathcal{C}^0 -stabilisable. On peut, cependant, établir aisément, grâce à des techniques d'algèbre de Lie (*cf.* [5]), que c'est un système complètement contrôlable. Notons que le linéarisé à l'origine ne possède aucun mode incontrôlable et instable.

2. CONDITION SUFFISANTE DE STABILISATION. – Soit le système :

$$(2) \quad x(k+1) = f(x(k)) + g(x(k))u(k), \quad f(0) = 0, \quad x(k) \in \mathbf{R}^n, \quad u(k) \in \mathbf{R}^m$$

où $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$ sont continues sur \mathbf{R}^n et où l'on suppose que :

(i). – Le système en régime libre $x(k+1) = f(x(k))$ est stable et l'on connaît une fonction de Liapounov $V(x)$, de classe \mathcal{C}^2 , telle que $V(f(x)) \leq V(x)$, $\forall x \neq 0$.

(ii). – Les ensembles

$$\begin{aligned} W_1 &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid V(f^{k+1}(x)) - V(f^k(x)) = 0, \quad k = 0, 1, \dots\} \\ W_2 &= \left\{x \in \mathbf{R}^n \mid \frac{\partial V}{\partial x}(f^{k+1}(x))g(f^k(x)) = 0, \quad k = 0, 1, \dots\right\} \end{aligned}$$

satisfont $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Posons, pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $u \in \mathbf{R}^m$:

$$\varphi(x, u) = - \int_0^1 \left(\frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + tg(x)u)g(x) \right)^\top dt$$

PROPOSITION – Si pour tout x la fonction $\varphi(x, \cdot)$ admet un point fixe $u(x) = \varphi(x, u(x))$ dépendant continuellement de x tel que $u(0) = 0$, le système (2) est globalement stabilisable par la loi de commande $x \mapsto u(x)$.

En effet, la variation $\Delta V(x) = V(f(x) + g(x)u(x)) - V(x)$ de V le long des trajectoires du système bouclé vérifie :

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) - u^T(x)u(x) \leq 0$$

d'où la stabilité. Par application du principe d'invariance de LaSalle [7], il suffit, pour la stabilité asymptotique globale, de montrer que le plus grand ensemble invariant Ω contenu dans $\{x \in \mathbf{R}^n \mid V(f(x)) - V(x) = 0 \text{ et } u(x) = 0\}$ est réduit à l'origine de \mathbf{R}^n . Notons que

$$u(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(f(x))g(x) = 0$$

Soit, alors une solution $x(k)$ telle que $x(0) = x \in \Omega$. Comme $u(x)$ s'annule identiquement sur Ω , on a $x(k) = f^k(x)$, $\forall k$. Il vient alors que $x \in W_1 \cap W_2$ et par suite $x = 0$. ■

Comme première illustration de ce résultat, notons que lorsque $V(f(x) + g(x)u)$ est un polynôme en u de degré 2 (cf. [2]) il vient :

$$\varphi(x, u) = - \left(\frac{\partial V}{\partial x}(f(x))g(x) \right)^T - \frac{1}{2}g^T(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(f(x))g(x)u$$

Si, comme dans [2], on suppose que $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(f(x)) \geq 0$ on aboutit à :

$$u(x) = -M^{-1}(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x}(f(x))g(x) \right)^T, \quad M(x) = I + \frac{1}{2}g^T(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(f(x))g(x)$$

En fait, on n'a pas besoin de l'hypothèse $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(f(x)) \geq 0$ car si on désigne par $\rho(x)$ le rayon spectral de la matrice $\frac{1}{2}g^T(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(f(x))g(x)$, le changement de contrôle $\tilde{u} = (1 + \rho(x))u$ transforme $\varphi(x, u)$ en :

$$\tilde{\varphi}(x, \tilde{u}) = - \left(\frac{\partial V}{\partial x}(f(x))g(x) \right)^T - \frac{1}{2 + 2\rho(x)}g^T(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(f(x))g(x)\tilde{u}$$

qui admet le point fixe :

$$\tilde{u}(x) = -\tilde{M}^{-1}(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x}(f(x))g(x) \right)^T, \quad \tilde{M}(x) = I + \frac{1}{2 + 2\rho(x)}g^T(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(f(x))g(x)$$

Il s'ensuit que la commande $u(x) = \frac{1}{1+\rho(x)}\tilde{u}(x)$ vérifiant $u(0) = 0$, stabilise globalement le système (2). ■

Le résultat suivant montre que tout système de la forme (2) vérifiant (i) et (ii) est globalement \mathcal{C}^0 -stabilisable par une commande bornée.

THÉORÈME 2. – *Si les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, alors, pour tout $\eta \in \mathbf{R}_+^*$, le système (2) est globalement \mathcal{C}^0 -stabilisable par une commande $u(x)$ vérifiant $\|u(x)\| \leq \eta$, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.*

Soit $\alpha : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ la fonction définie par :

$$\alpha(x, u) = \frac{\eta}{1 + K_1(x) + 2\eta K_2(x)} \varphi(x, u)$$

$$K_1(x) = \sup_{\|u\| \leq \eta} \|\varphi(x, u)\|, \quad K_2(x) = \sup_{\|u\| \leq \eta} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, u) \right\|$$

Pour tous $x \in \mathbf{R}^n$ et $u \in \mathbf{R}^m$ tel que $\|u\| \leq \eta$, on a :

$$\|\alpha(x, u)\| \leq \eta, \quad \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u}(x, u) \right\| \leq \frac{1}{2}$$

Par application du théorème du point fixe, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ la fonction $\alpha(x, \cdot)$ admet un point fixe unique $u(x) = \alpha(x, u(x))$ dépendant continuellement de x et vérifiant $\|u(x)\| \leq \eta$, $u(0) = 0$. Il vient alors :

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) - \frac{1}{\eta} (1 + K_1(x) + 2\eta K_2(x)) u^T(x) u(x) \leq 0$$

Le Théorème découle, comme précédemment, du principe d'invariance de LaSalle. ■

References

RÉFÉRENCES

BIBLIOGRAPHIQUES PUBLICATIONS

- [1] R.W. BROCKETT, Asymptotic stability and feedback stabilization, dans *Differential Geometric Control Theory*, Birkhauser, Boston, 1983, p. 181-191. [2] C.I. BYRNES, W. LIN et B.K. GHOSH, Stabilization of discrete-time nonlinear systems by smooth state feedback, *Systems & Control Letters*, 21, 1993, p. 255-263. [3] W. HAHN, *Stability of motion*, Springer-Verlag, New York, 1967. [4] A. HALANAY, Quelques questions de la théorie de la stabilité pour les systèmes aux différences finies, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 12, 1963, p. 150-154. [5] B. JAKUBCZYK et E.D. SONTAG, Controllability of nonlinear

discrete-time systems: a Lie-algebraic approach, *SIAM J. Control Optim.*, 28, 1990, p. 1-33.

[6] V. JURDJEVIC et J.P. QUINN, Controllability and stability, *Journal of Differential equations*, 28, 1978, p. 381-389. [7] J.P. LASALLE, *The stability and control of discret Processes*, Springer-Verlag, New York, 1986.